محاضرة رياضة (٨)

Ex show that

$$Ln \frac{x+iy}{x-iy} = 2i \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

الحل

$$Z = x+iy = re^{i\theta}$$

$$\bar{Z} = x-iy = re^{-i\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$Ln \frac{x+iy}{x-iy} = Ln \frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} = Ln\, e^{2i\theta} = 2i\theta$$

$$= 2i \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

→ Tragnometric functions

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad ; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-z}}{2}$$

الأذكار

1 ايجاد علاقات جبرية بين الدوال الزائدية والمثلثية

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

$$\cos^2 w + \sin^2 w = 1$$

$$\cosh^2 w - \sinh^2 w = 1$$

2 ايجاد جذور المعادلة تحتوي على دوال مثلثية أو زائدية وعدد مركب مثل.

$$\left.\begin{array}{l} \cos z \\ \sinh z \\ \sin z \\ \cosh z \\ \vdots \end{array}\right\} = a + ib$$

$\boxed{3}$ إستنتاج علاقة بين الدوال المثلثية العكسية والزائدية العكسية والصور اللوغاريتمية:

$$\sin^{-1} z = i\,Ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\cos^{-1} z = i\,Ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\,Ln\left(\frac{1+z}{1-iz}\right)$$

$$\text{sech}^{-1} z = Ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = Ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\sin^{-1} z = w \Rightarrow z = \sin w$$

<u>أسلوب الحل</u> نضع الدوال المثلثية العكسية ناحية الرأس شل

$$\sin^{-1} z = w \Rightarrow z = \sin w$$

← نضع الدوال المثلثية بدلالة (e) ونضرب في e^{-iw} أو e^{-w}

← فتتحول المعادلة إلى معادلة من الدرجة الثانية

← فنأخذ لوغاريتم الجذر فيكون المطلوب

$\boxed{3}$ Lec 8

1) show that

$$|\cos z|^2 = \cos(x+iy)$$

Sol

$$\cos z = \cos(x+iy)$$

$$= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$

$$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \underbrace{\cosh^2 y}_{(1+\sinh^2 y)} + \underbrace{\sin^2 x}_{(1-\cos^2 x)} \sinh^2 y$$

$$= \cos^2 x\,(1+\sinh^2 y) + \sinh^2 y\,(1-\cos^2 x)$$

$$= \cos^2 x + \sinh^2 y$$

Ex2 find all roots of $\cosh z = 5$

sol

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$e^{z} + e^{-z} = 10$ بالضرب * e^{z}

$$(e^{z})^{2} + 1 = 10\, e^{z}$$

$$(e^{z})^{2} - 10\, e^{z} + 1 = 0$$

$x^{2} - 10x + 1 = 0$

$x \longrightarrow e^{z}$

$$\text{roots} = \frac{\cancel{10}\; -b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = e^{z}$$

$$z = \ln(5 \pm 4.9)$$

Case (1)

$Z_1 = Ln\ 9.9$

$Ln(x+iy) = Ln\ r + i(\theta \pm 2n\pi)$

$x = 9.9\ ;\ y = 0 \Rightarrow r = 9.9\ ;\ \theta = 0$

$Z_1 = Ln(9.9) \simeq Ln(9.9) + i(0 \pm 2n\pi)$

$Z_1 \simeq 2.29 \pm 2n\pi i$

Case 2

$Z_2 = Ln(0.1)$

$Z_2 \simeq -2.3 \pm 2n\pi i$

Ex:3 show that

$$\cosh^{-1} z = \ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = w \implies z = \cosh w$$

$$z = \frac{e^{w}+e^{-w}}{2} \implies e^{w}+e^{-w} = 2z$$

بالضرب * e^{w}

$$(e^{w})^2 - 2z\,e^{w} + 1 = 0$$

roots $= \dfrac{2z \pm \sqrt{4z^2-4}}{2} = e^{w}$

$$w = \ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = \ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

Complex Integration

تكامل الدوال المركبة

$$I = \int_C f(z)\,dz$$

- الهدف من دراسة تكامل الدوال المركبة هو إيجاد صور مبسطة للتكاملات التي تساعدنا على حساب بعض التكاملات بمجرد النظر كما أنه يمكن تحويل التكاملات التي يصعب تكاملها بالقواعد السابقة إلى تكاملات المركبة لحسابها وإرجاعها للصورة الأصلية.
- يمكن بعض التحويلات المعروفة مثل (Laplace transform) أي نأخذ دوال لا يمكن إيجاد $(\mathcal{L}.T)$ بالقواعد العادية نحولها إلى صور تكاملية في الأعداد المركبة لحساب بعض التحويلات التي يصعب حسابها $(\mathcal{L}.T)$ وإرجاعها إلى s-domain أو t-domain.

b		a

- أنا عند a ومش عارف أكاملها هحولها عند b وأكاملها وأرجع تاني عند (a) أتنطط عليه بإني حليتها.

$$I = \int f(z)\, dz$$

$$Z = x + iy$$

$$dz = dx + i\,dy$$

$$f(z) = u + iv$$

$$I = \int_c (u + iv)(dx + i\,dy)$$

$$I = \int_c (u\,dx - v\,dy) + i \int_c (v\,dx + u\,dy)$$

← فيتحول التكامل إلى جزأين كل جزء تكامل خطى لدوال عادية.

⟸ الأفكار

$\boxed{1}$ تكامل على منحنى غير مغلق أو لدالة ليست (analytic)

يرمز له بالرمز $\int_c f(z)\, dz$ ← ده شغلنا طول الترم.

$\boxed{2}$ تكامل على منحنى مغلق أو دالة analytic.

← قواعد تحل بمجرد النظر.

← يرمز له بالرمز $\oint_c f(z)\, dz$

ج) رقم (١) [التكامل على منحنى مغلق)

← نعوض في الصورة

$$I = \int_c (u\,dx - v\,dy) + i \int_c (v\,dx + u\,dy)$$

← من معادلة المنحنى c تجعل التكامل تكامل محدد.

بأن نحول المتغيرات داخله إلى متغير واحد من معادلة c

① نجعل كله x ، dx .

② نجعل كله y ، dy .

③ الصورة البارامترية t ، dt .

بعض الصور البارامترية

١ الدائرة :-

$$* \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$

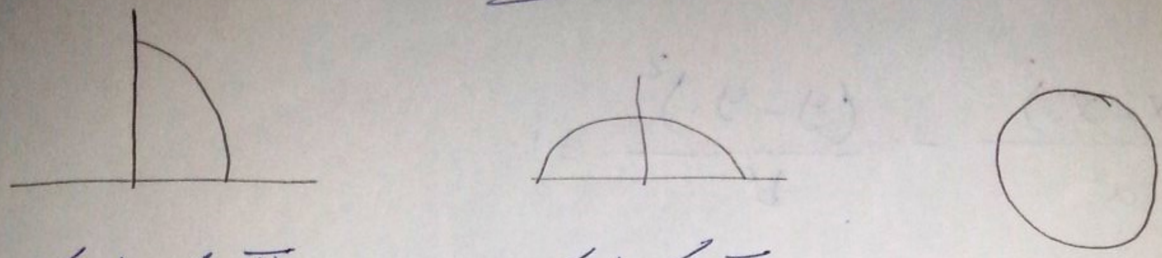
$$x - x_0 = a\cos t \Rightarrow x = x_0 + a\cos t$$

$$y - y_0 = a\sin t \Rightarrow y = y_0 + a\sin t$$

← لو جت مسألة فيها دائرة بالشكل ده هنحط

$x - x_0 = a\cos t$ ، $y - y_0 = a\sin t$

وفترات الدائرة هتكون كما يلي :-



$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $0 \leq t \leq \pi$ $\qquad$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$$dx = -a \sin t \, dt \,,\; dy = a \cos t \, dt$$

$\boxed{2}$ قطع ناقص

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Let

* $\frac{x - x_0}{a} = \cos t \;;\; \frac{y - y_0}{b} = \sin t$

* $x = x_0 + a \cos t \,,\; y = y_0 + b \sin t$

* $dx = -a \sin t \, dt \,,\; dy = b \cos t \, dt$

3 قطع زائد :-

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$\Rightarrow x = x_0 + a\cosh t \ , \ y = y_0 + b\sinh t$

---

4 القطع المكافئ :-

$y = ax^2$

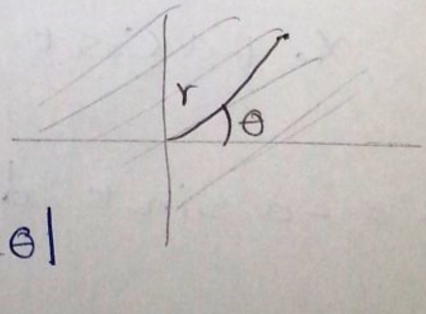
* $x = t \ , \ y = at^2$

* $dx = dt \ , \ dy = 2at\,dt$

---

5 إذا أعطى دائرة أو جزء من دائرة بالصورة المركبة
ممكن نحولها لدوال في x, y
لكن هنشوف ليها حل آخر.

$|z - z_0| = a$



Notes

$z = re^{i\theta}$

$|z| = r|e^{i\theta}| = r|\cos\theta + i\sin\theta|$

$|z| = r \qquad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$|z - z_0| = a$

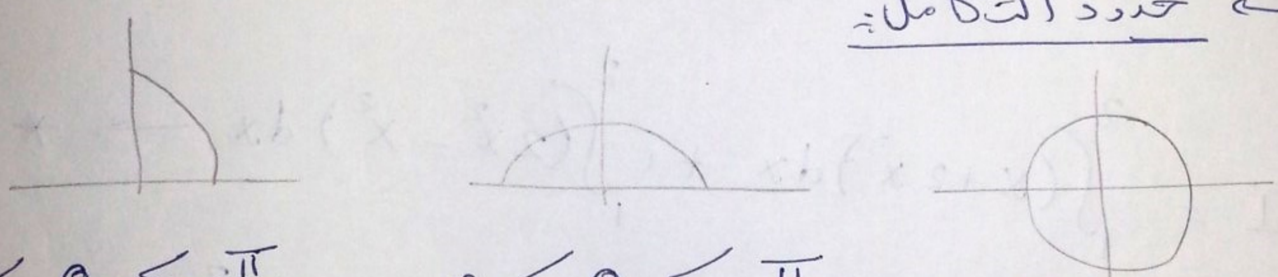
$z - z_0 = a e^{i\theta}$

$* \; (x - x_0) + i(y - y_0) = a\cos\theta + i a \sin\theta$

$* \; x - x_0 = a\cos\theta \quad , \quad y - y_0 = a \sin\theta$

$* \; dx = -a \sin\theta \, d\theta \quad , \quad dy = a\cos\theta \, d\theta$

← تحديد التكامل:



$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq \pi$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

EX:1 Evaluate $\displaystyle\int_{1+i}^{2+4i} \bar{z} \, dz$ along

① $y = x^2$ $\qquad 1 \leq x \leq 2$

② Line from from $1+i$ to $2+4i$

Sol

$$I = \int_{1+i}^{2+4i} (x - iy)\,(dx + i\,dy)$$

$$= \int_{1+i}^{2+4i} (x\,dx + y\,dy) + i \int_{1+i}^{2+4i} (x\,dy - y\,dx)$$

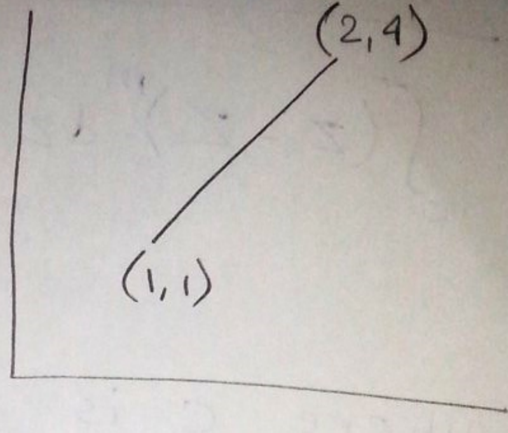
(1) $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$

$$I = \int_1^2 (x + 2x^3)\,dx + i \int_1^2 (2x^2 - x^2)\,dx \longrightarrow *$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} \right)\Bigg|_1^2 + i \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_1^2$$

$=$

$\boxed{2}$



$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{3}{1}$$

$$y-1 = 3x-3$$

$$\boxed{y = 3x-2}$$

$dy = 3\,dx$ $\qquad\qquad 1 \leq x \leq 2$

* بالتعويض في المعادلة *

$$I = \int_1^2 \left(x + (3x-2)3\right) dx + i \int_1^2 \left[3x - (3x-2)\right] dx$$

أكمل :

* Prove that

$$\int_C (z-z_0)^m \, dz = \begin{cases} 2\pi i & m = -1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where C is $|z-z_0| = a$

Sol

$m \neq -1$

$|z-z_0| = a \Rightarrow z - z_0 = a e^{i\theta}$

$dz = i a e^{i\theta} \, d\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi} (a e^{i\theta})^m \, i a e^{i\theta} \, d\theta$$

$$= i a^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\theta} \, d\theta$$

$$= i a^{m+1} \left. \frac{e^{i(m+1)\theta}}{i(m+1)} \right|_0^{2\pi}$$

$$I = \frac{i\,a^{m+1}}{i(m+1)}\left[e^{2\pi(m+1)i} - 1\right]$$

$\sin$ (أي حاجة) $\pi = 0$; $\cos$ (أي عدد صحيح) $\pi = -1$

$\sin n\pi = 0$; $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$e^{2(m+1)\pi i} = \cos 2(m+1)\pi + i\,\underbrace{\sin 2(m+1)\pi}_{\text{zero}}$$

$$= (-1)^{2(m+1)} = 1$$

$$\boxed{\therefore\ I = 0}$$

$m = -1$

$$I = \int_c \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i a e^{i\theta}\, d\theta}{a e^{i\theta}}$$

$$= 2\pi i$$